3.4 Weibull-Funktionen für nicht linearen Verlauf

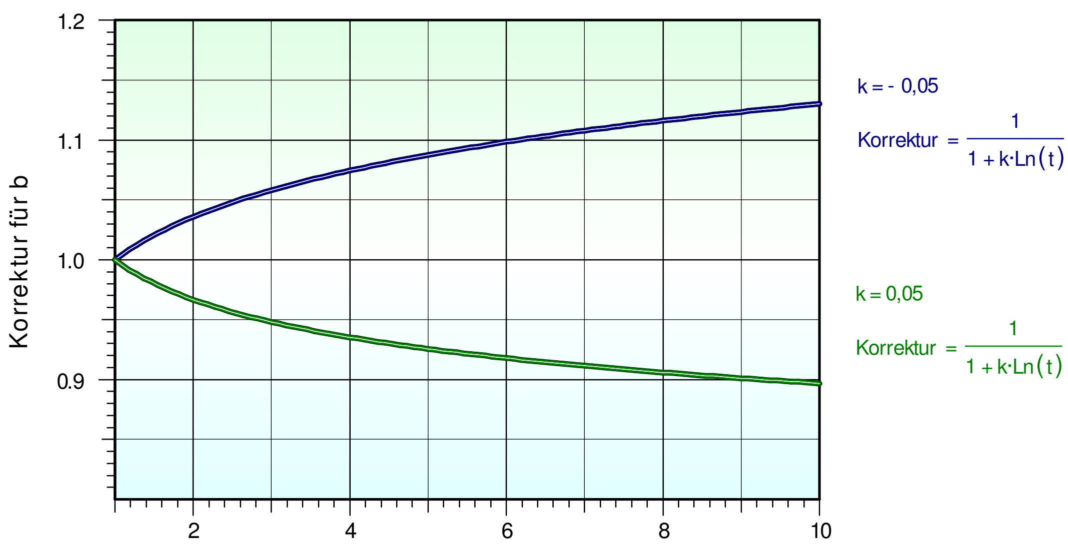
Häufig gibt es nicht lineare Verläufe im Weibull-Diagramm, die mit der 3-parametrigen Funktion (to) nicht erfasst werden können. Insbesondere der Verlauf über eine sehr lange Lebensdauer flacht stetig ab. Dies ist der Fall, wenn die Produkte über der Zeit durch andere Zusammenhänge, als das Ausfallmerkmal abnehmen (z.B. Sterbekurve bei Fahrzeugen aufgrund von Unfällen). Hierbei ist die Krümmung im Weibull-Diagramm über der Zeit relativ gleichmäßig, während die 3-parametrige Weibull-Funktion mit to am Anfang häufig sehr steil und später fast lineare ausläuft. Gesucht wird eine Funktion bzw. eine Erweiterung der Weibull-Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- Kurvenverlauf im Weibull-Netz mit möglichst gleichmäßiger Krümmung
- Darstellung auch von linksgekrümmten Verläufen (progressive Zunahme)

Diese Vorgabe lässt sich mit folgendem Term im Exponent von b realisieren:

$$\frac{1}{1+k\,\ln(t)}$$

Der Parameter k stellt die Stärke der Krümmung dar. Wenn diese positiv ist, ergibt sich eine abnehmende Steigung b. Ist er negativ, so entsteht eine zunehmende Steigung. Das folgende Beispiel zeigt für k=-0,05 und k=0,05 die Verläufe:



Beim Start bei $t=1$ ist die Korrektur=1. Die Steigung ist hier also die „originale". Die Interpretation bezüglich b bezieht sich also auf den Anfang, während das ermittelte b für die 3-parametrige Weibull-Funktion näherungsweise im Auslauf rechts an der Kurve zu interpretieren ist.
Weibull-Funktion mit zeitabhängigem Korrekturfaktor b wird somit zu:

$$H = 1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{b}{1+k\ln(t)}}}$$

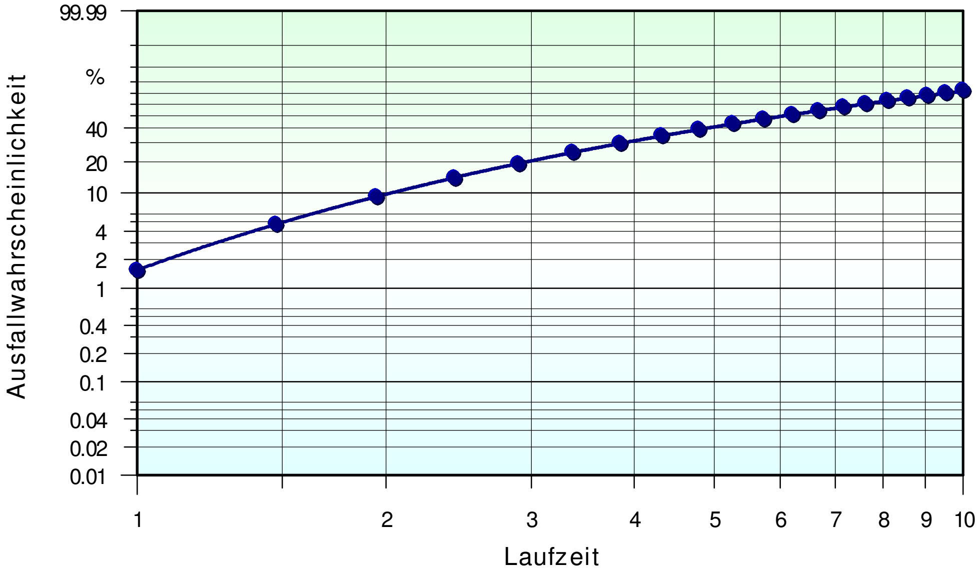
Diese Form soll als **Weibull-Kurvenfunktion** genannt werden. Der Logarithmus stellt sicher, dass zu hohen Laufzeiten die Korrektur nicht übermäßig wächst. Bei konkavem Verlauf mit negativem k darf der Nenner $1+k\ ln(t)$ nicht ≤ 0 werden. Außerdem kann es passieren, dass diese erweiterte Weibull-Funktion über 100% geht. Beides stellt einen unzulässigen Bereich dar.
Diese Erweiterung (variables b) basiert nicht auf Herleitung eines bestimmten Sachverhaltes (z.B. der genannten Sterbekurve). Hiermit soll lediglich eine Funktion für konkave oder konvexe Kurvenverläufe zur Verfügung gestellt werden, mit der man den Verlauf einer nichtlinearen Weibull-Kurve besser beschreiben kann. Das Maß für die Güte dieser Funktion ist der Korrelationskoeffizient r. Je besser dieser ist, desto sicherer kann man diese neue Weibull-Funktion auch zum Extrapolieren zu höheren Laufzeiten verwenden, als Datenpunkte vorliegen.

Beispiel für einen degressiven Verlauf:

T = 8,0746   b = 1,99   k = 0,308

$$H = 100\% \cdot \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{b}{1 + k \cdot Ln(t)}}}\right)$$

r = 1



Der Parameter k muss iterativ bestimmt werden. Als erste Schätzung für den Start der Iteration kann b aus der Ausgleichsgerade ermittelt werden. Ebenso die charakteristische Lebensdauer T.

Ein anderer Ansatz ist die Verwendung einer **Exponentialfunktion** anstelle der Ausgleichsgerade.

$$Y' = \alpha \cdot e^{\varphi X}$$

Mit diesem Ansatz lassen sich nichtlinearen Verläufe, insbesondere annähernd gleichmäßig gekrümmte, ideal abbilden. Diese Funktion ist allerdings zunächst links- statt rechtsgekrümmt. Die Transformation erfolgt deshalb günstiger weise mit (siehe Kapitel Bestimmung der Weibull-Parameter):

$$Y' = -\ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-H}\right)\right) + \tau$$

und dem Offset $\tau = Y[n_a]+1$ für den letzten Ausfallpunkt n_a. Hiermit erreicht man, dass die Punkte um die X-Achse herum gespiegelt werden und die Funktion rechtsgekrümmt ist.

Setzt man nun X und Y' in die Exponentialgleichung ein, so entsteht letztlich:

$$H = 1 - e^{-e^{-\left(\alpha\, e^{\varphi \ln(t)} - \tau\right)}}$$

Fast man den Exponenten zu x zusammen, so entspricht diese neue Form der in Fachkreisen bekannten Extremwertverteilung Typ I nach Gumbel:

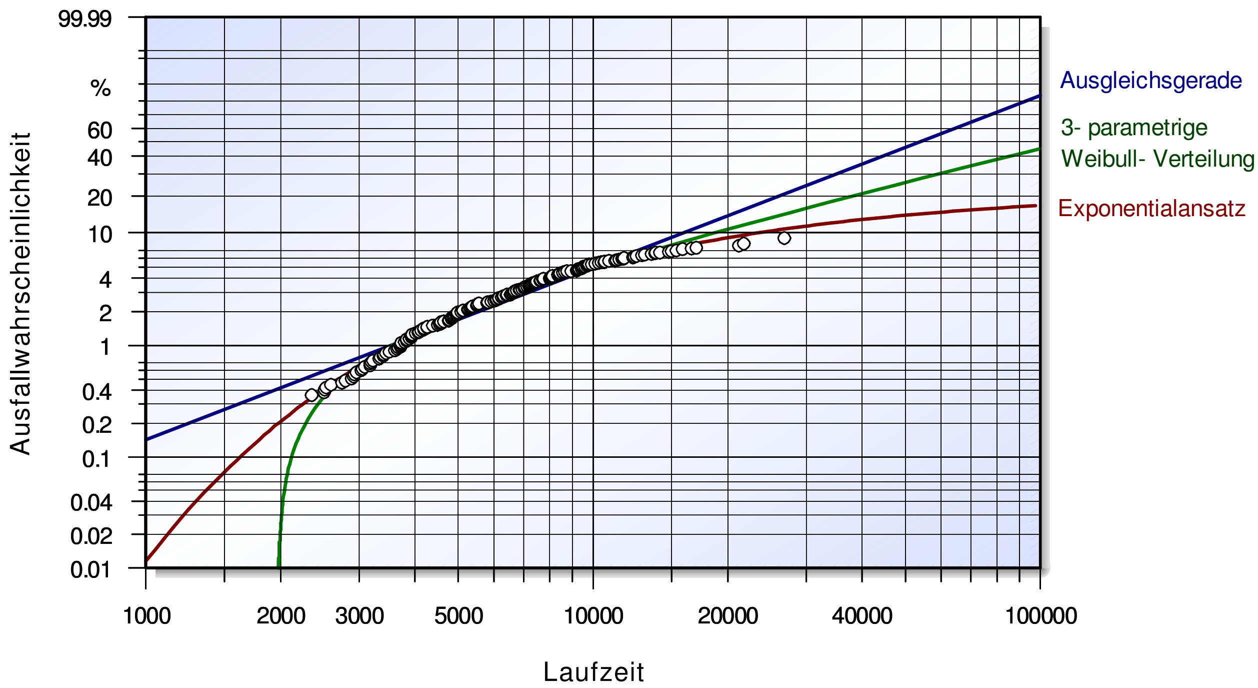
$$H = 1 - e^{-e^{-x}}$$

Die entsprechende Umkehrfunktion der neuen Exponentialform lautet:

$$t = e^{\frac{1}{\varphi}\ln\left(\frac{\tau - \ln(\ln(1/(1-H)))}{\alpha}\right)}$$

Hiermit kann z.B. der t_{10}- Wert (bzw. B_{10}) ausgerechnet werden, für H = 0,10 = 10% Ausfälle.

Folgendes Beispiel zeigt die Unterschiede anhand eines konkreten Ausfallverhaltens:



Die klassische Ausgleichsgerade liefert die schlechteste Beschreibung der Ausfälle, insbesondere ab 10.000 km. Die 3-parametrige Weibull-Verteilung mit der ausfallfreien Zeit t_0 ist schon deutlich besser, zeigt aber im Auslauf der letzten Ausfallpunkte immer noch zu große Abweichungen. Eine Aussage über die Ausfallwahrscheinlichkeit z.B. bei 100.000 km würde viel zu hohe Werte liefern. In diesem Fall wären ca. 45% Ausfälle zu erwarten gewesen. Diese haben sich später aber nicht eingestellt.
Erst der Exponentialansatz war zufriedenstellend. Das Ergebnis wurde noch besser, wenn man für die Bestimmung der Weibull-Funktion nur die hinteren oberen Punkte verwendete (ca. 2/3 der Gesamtanzahl). Frühausfälle im ganz vorderen Bereich sind bereits aus der Darstellung herausgenommen worden (Prozessfehler).

Der Weibull-Exponentialansatz zeigt keine charakteristische Ausfallzeit T oder Steigung b die zu interpretieren wäre. α, φ und τ sind entsprechend nur Form- und Lageparameter dieser Funktion. Eine Vergrößerung von α verschiebt die Kurve nach rechts. Dies ist vergleichbar mit dem Verhalten, wenn T in der 2-parametrigen Weibull-Funktion vergrößert wird. Allerdings verschieben auch φ und τ die Kurve. Eine Vergrößerung der jeweiligen Werte ergibt hier eine Linksverschiebung, wobei der Verlauf zusätzlich steiler und stärker gekrümmt wird.

Wann entscheidet man sich für diesen Ansatz? Die Anpassung der erzeugten Kurve an die Ausfallpunkte wird zunächst optisch beurteilt. Passt der gleichmäßig gekrümmte Verlauf zu den Punkten, so entscheidet man sich mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten aus dem Ansatz der kleinsten Fehlerquadrate zwischen der 3-parametrigen Weibull-Verteilung oder dem Exponentialansatz. Je näher der Korrelationskoeffizient an 1 liegt, desto besser ist die Funktion geeignet. Zur Anpassung der Funktion an konkrete Ausfallpunkte ist es evtl. sinnvoll nicht zum Kurvenverlauf passende Anfangspunkte (Frühausfälle) und extreme Endpunkte auszusparen.

Die beiden gezeigten Ansätze empfehlen sich also, wenn die Ausfallpunkte, zumindest im mittleren Bereich, stetig und gleichmäßig rechtsgekrümmt sind. Gibt es Mischerteilungen, oder mehrfach gekrümmte Verläufe, so ist die Methode zur Bestimmung einer Mischverteilung eine Alternative.