3.11 Bestimmung der Weibull-Parameter

In der klassischen Betrachtung ergeben sich die Weibull-Parameter durch Berechnung der Ausgleichsgerade im linearisierten Weibull-Wahrscheinlichkeitsdiagramm /1/.

Die Punkte für die Ausgleichsgerade bestimmen sich durch Umstellen der 2-parametrigen Weibull-Funktion:

$$X = \ln(t)$$

$$Y = \ln\left(\ln\left(\frac{1}{1-H}\right)\right)$$

Allgemein wird eine Ausgleichsgerade durch:

$$Y = b\,X + a$$

beschrieben. Bezogen auf unsere Linearisierung entspricht dies:

$$Y = b\,X - b\ln(T)$$

b ist also gleichzeitig die Steigung der Ausgleichsgerade, als auch der Formparameter im Weibull Netz. Die Bestimmung von b und a erfolgt in der Regel durch die bekannte Methode der kleinsten Fehlerquadrate und den obigen Werten X und Y. T berechnet sich dann aus dem Schnittunkt der Ausgleichsgerade durch die Y-Achse, mit:

$$a = -b \cdot ln(T)$$

und aufgelöst nach

$$T = e^{-\frac{a}{b}}$$

In der Literatur wird häufig empfohlen, die lineare Regression über X und Y anstelle von Y und X durchzuführen. Die Berechnung der Häufigkeiten ist weniger fehlerbehaftet, als die Angaben der Laufzeiten. Deshalb macht es Sinn die Fehlerquadrate in X- und nicht in Y-Richtung zu minimieren (Least-Square-Methode). Der Ansatz lautet dann:

$$Y = \frac{1}{b}X + \frac{1}{b}\ln(T)$$

Die Unterschiede sind in der Praxis in bezug auf b jedoch vernachlässigbar.

In der Praxis werden b und T häufig durch die Berechnungsmethode von **Gumbel** /4/ berechnet, bei der die Punkte im Weibull-Netz anders gewichtet werden:

$$b = \frac{0.557}{s_{\log}}$$

$$T = 10^{\left(\sum_{i=1}^{n} \log(t_i)\right)/n + 0,2507/b}$$

mit
$s_{\log}$ = logarithmische Standardabweichung

! Bei dieser Bestimmung ergeben sich gegenüber der Standardmethode größere Werte für b, was bei der Interpretation der Ergebnisse zu beachten ist.

Eine weitere Methode zur Bestimmung von b und T ist die **Maximum-Likelihood-Abschätzung** (maximale Wahrscheinlichkeit) /5/. Für die Weibull-Analyse ergibt sich folgende Beziehung:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i^b \ln(t_i)}{\sum_{i=1}^{n} t_i^b} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(t_i) - \frac{1}{b} = 0$$

Es wird davon ausgegangen, dass alle Schadensfälle den gesuchten Ausfallkriterium entsprechen. Zur Ermittlung von b muß diese Beziehung iterativ gelöst werden. Ist b bestimmt worden, kann T direkt berechnet werden:

$$T = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i{}^b\right)\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$$

Eine weitere wichtige Methode ist die sogenannte **Momentmethode** und im speziellen die vertikale Momentmethode. In der entsprechenden Herleitung von Weibull, veröffentlicht in /11/, ergeben sich die Parameter T und b durch:

$$b = \frac{\ln(2)}{\ln(\overline{V}_1) - \ln(\overline{V}_2)} \qquad T = \frac{\overline{V}_1}{(1/b)!}$$

mit

$$\overline{V}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} t_m + \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} t_i\right)$$

$$\overline{V}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)^2} t_m + \frac{4}{n+1} \sum_{i=1}^{n} t_i - \frac{4}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} \left(i \ t_i \ \right) \right)$$

$$t_m = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})$$

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass es sich mit relativ geringem Rechenaufwand und Rechenzeit begnügt und nicht wie das Maximum-Likelihood-Methode iterativ gelöst werden muß.

Für die Werte 1000, 2000, 3000, 4000 und 5000 sollen beispielhaft die entsprechenden Parameter verglichen werden

Verfahren	b	T
Ausgleichsgerade	1,624	3524
Gumbel	2,018	3468
Maximum-Likelihood	2,294	3394
Momentenmethode (vertikal)	1,871	3281

Die Maximum-Likelihood-Methode ergibt hier die größte Steigung, wärend die Methode der Ausgleichsgerade am flachsten ist. In den folgenden Analysemethoden werden Überlegungen auf Basis der Ausgleichsgeraden durchgeführt, die als Standard anzusehen ist.